

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. Ю.С. ЗАЙЦЕВА, канд. техн. наук (zyus@ipme.ru)  
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ»),  
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (alf@ipme.ru)  
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;  
Санкт-Петербургский государственный университет)

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ «МОСТ–ПЕШЕХОДЫ» НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ ЦЫПКИНА<sup>1</sup>

Построена новая кибернетическая модель динамики движения системы «мост–пешеходы» в поперечном направлении с учетом функционального состояния пешехода. Получено аналитическое выражение для критического количества пешеходов, способных раскачать мост, и рассчитана область устойчивости системы с помощью частотного критерия Я.З. Цыпкина для параметров лондонского моста Миллениум. Результаты работы показывают, что раскачивание моста может быть связано с малым нервно-мышечным запаздыванием пешеходов, а не с синхронизацией их шагов, как считается в ряде существующих публикаций. Полученные результаты могут иметь применение и к другим классам колебательных человеко-машинных систем.

*Ключевые слова:* устойчивость, надежность конструкций, раскачивание моста, танцующий мост, лондонский мост Миллениум.

DOI: 10.31857/S0005231025010068, EDN: JQHZXD

### 1. Введение

За последние два столетия произошло несколько десятков инцидентов, связанных с пешеходными мостами, включая случай качания лондонского моста Миллениум [1]. Этот мост был возведен в честь наступления третьего тысячелетия, что отразилось в архитектуре его легкой подвесной конструкции, где тросы находятся ниже уровня палубы. Мост Миллениум является одним из немногих объектов, о котором собрано много ценных наблюдений. Например, известно, что поперечные колебания нарастали с ростом количества пешеходов и затухали, если людей становилось меньше или они полностью останавливались. Инцидент с мостом Миллениум вызвал целую волну публикаций известных ученых в престижных научных журналах [2–5].

<sup>1</sup> Работа поддержана Минобрнауки РФ (проект госзадания 124041500008-1).

В первых публикациях делался вывод, что большую амплитуду колебаний вызывает синхронный шаг пешеходов. Это не только соответствовало распространенному общественному мнению, но и хорошо укладывалось в теорию синхронизации связанных осцилляторов [6]. Однако позже появились данные наблюдений, которые невозможно объяснить только синхронизацией, например появление колебаний, не связанных со средней частотой шагов, наличие определенного критического количества пешеходов, способных раскачать мост [1, 7]. На основании этого ряд ученых выдвинули предположение, что синхронизация является следствием, а не причиной раскачки моста [4, 5, 8–10].

В данной работе предлагается новая модель динамики системы «мост–пешеходы» в поперечном направлении, учитывающая функциональное состояние пешехода при помощи звена запаздывания. На основе новой модели предложен новый подход к анализу устойчивости системы.

Известны подходы к анализу системы «мост–пешеходы», в которых модель системы описывается в терминах механики и действия динамических сил во временной и частотной областях [11, 12]. Наиболее часто встречающаяся в литературе динамическая модель моста описывается следующим уравнением [8, 12, 13]:

$$(1) \quad M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t),$$

где  $M$ ,  $C$ ,  $K$  – матрицы массы, демпфирования и жесткости,  $x(t)$  – вектор перемещения,  $F(t)$  – вектор внешних сил, который определяется как [14]:

$$(2) \quad F(t) = G_p + \sum_{i=1}^n G_p \alpha_i \sin(2\pi i f t - \phi_i),$$

где  $G_p$  – вес человека,  $\alpha_i$  – коэффициент Фурье  $i$ -й гармоники,  $f(t)$  – частота,  $\phi_i$  – фазовый сдвиг  $i$ -й гармоники,  $i$  – порядковый номер гармоники,  $n$  – общее число гармоник.

По аналогии с (1) динамику пешеходов описывают как осциллятор со своей массой, жесткостью и коэффициентом демпфирования. Такой подход продемонстрирован для анализа вертикальных колебаний в [15, 16], где система «мост–пешеходы» имеет вид

$$(3) \quad \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_c(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_c & -c_c \\ -c_c & c_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s + k_c & -k_c \\ -k_c & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s(t) \\ x_c(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_s(t) \\ f_c(t) \end{Bmatrix}.$$

В (3)  $m$ ,  $c$  и  $k$  – масса, коэффициент демпфирования и жесткость соответственно, индекс  $s$  соответствует мосту,  $c$  – пешеходу.

Модель перевернутого маятника с жесткой опорой и ограниченная фронтальной плоскостью хорошо отражает основные особенности поведения пешеходов на горизонтально колеблющейся поверхности, включая кинематику

и кинетику [9, 17]. Одно из допущений такой модели состоит в том, что колебания поверхности земли не влияют на время шагов пешеходов, что, как показано в [18], не всегда имеет место в реальности. В этой работе предложен закон управления постановкой ног с учетом запаздывания при контакте стопы с землей.

Последние достижения в решении проблемы устойчивости пешеходных мостов изложены в работах [8–10], результаты которых получены на основе предположения о синхронизации шагов как следствии раскачки моста. Это условие позволяет составить соотношение баланса амплитуды и фазы между пешеходами и мостом, откуда можно получить критическое количество пешеходов, удовлетворяющее этому соотношению. Динамика пешехода в [8–10] описана с помощью осциллятора Ван дер Поля:

$$(4) \quad f(x, \dot{x}) = \lambda(\dot{x}^2 + x^2 a^2) \dot{x} + \omega^2 x,$$

где  $x$  – координата центра масс пешехода,  $\lambda$  – демпфирование,  $a$  – амплитуда предельного цикла,  $\omega$  – частота шагов. В последующей работе авторов [8] сила  $F(t)$ , действующая на мост со стороны пешеходов, выражается через средний коэффициент демпфирования пешехода  $\bar{\sigma}(\bar{\omega}_i, \Omega)$ , который, в свою очередь, в большей степени зависит от отношения частоты колебаний моста  $\Omega$  к частоте шагов  $\bar{\omega}_i$ . Было выяснено, что существует большой диапазон частот шагов пешеходов и колебаний моста, при котором  $\bar{\sigma}(\bar{\omega}_i, \Omega) < 0$ . Это означает, что при некотором критическом числе пешеходов общее модальное демпфирование моста становится отрицательным. В результате авторами предложена простая формула вычисления критического числа пешеходов:

$$(5) \quad N_{cr} = -c_0 / \bar{\sigma},$$

где  $c_0$  – коэффициент пассивного демпфирования моста.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дается постановка задачи. Раздел 3 содержит описание модели системы «мост–пешеходы». В разделе 4 представлен анализ устойчивости системы «мост–пешеходы» и аналитические выражения для критического количества пешеходов. Результаты и возможности их применения описаны в разделе 5.

## 2. Постановка задачи

В существующей литературе используется подход к моделированию пешеходов, сосредоточенный на понимании механизмов шагания, которые появляются в результате управления его центральной нервной системы. Однако высокая чувствительность человека к колебаниям поверхности вызывает у него ответную реакцию и последующие мышечные действия, что показывает необходимость учитывать человека как звено замкнутой системы с его физическими и психофизиологическими свойствами. Такой подход известен

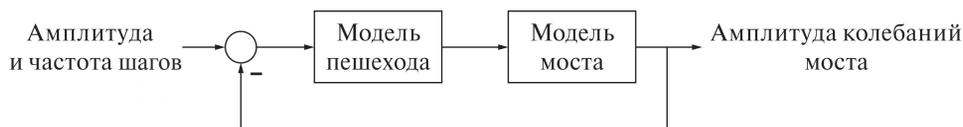


Рис. 1. Общая структурная схема системы «мост–пешеходы».

в области человеко-машинных систем и основан на описании функционального состояния человека [19], но до сих пор не использовался для описания динамики походки.

Не касаясь причин раскачивания моста, будем считать, что люди идут по нему со средней частотой шагов, действуя на поверхность силой своего веса и одновременно пытаются сохранить равновесие, ориентируясь на зрительную и вестибулярную информацию от центральной нервной системы. Соответствующая такой системе блок-схема показана на рис. 1. В связи с этим в данной работе предлагается разработка кибернетической модели системы «мост–пешеходы» и исследование ее на предмет возможности использования для проектирования и анализа колебаний конструкции моста методами теории автоматического управления. Для этого необходимо описать динамику движения каждого компонента системы «мост–пешеходы» с помощью динамических звеньев.

### 3. Модель системы «мост–пешеходы»

Человек естественным образом демонстрирует разнообразные виды движения, из-за своей хаотичности трудно поддающиеся описанию. Так, известны работы, где отдельно рассматривается влияние на конструкцию группы идущих [15], бегущих [20] и подпрыгивающих людей [21]. Обозначение конкретных задач и разделение движений, выполняемых человеком, позволяет ввести приближенное математическое описание его действий, отражающее основные свойства локомоции. Их применение – область проектирования двуногих роботов и человеко-машинных систем. Касательно последних, широко известны результаты кибернетической модели управляющих действий пилота в задаче слежения за ошибкой и скоростью отклонения тангажа, что помогло понять причины явления колебаний, вызванных летчиком [22, 23]. Результаты исследований взаимодействия человека–пилота и летательного аппарата выявили стремление человека управлять оптимальной системой, что проявляется как свойство адаптации его нервно-мышечной динамики к изменяющейся динамике системы [19, 22–25].

Оптимальность движений человека часто упоминается в контексте энергетических затрат, необходимых для реализации того или иного движения. Такая характеристика может быть использована для периодических и повторяющихся движений, к которым относится ходьба на большом интервале времени. При передвижении по неподвижной поверхности первоочередной задачей является сохранение равновесия, что человек решает рефлекторно,

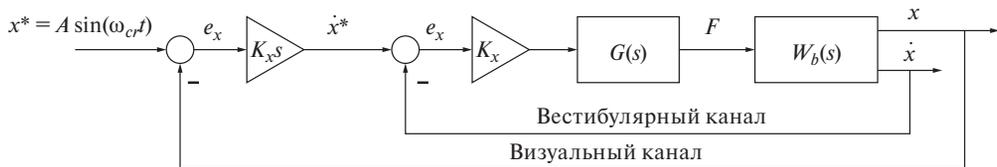


Рис. 2. Контур системы «мост–пешеходы».

не задумываясь. При передвижении по неустойчивой поверхности человеку приходится прикладывать усилия, или управление, чтобы сохранить равновесие, для чего, по-видимому, необходимо время на переработку информации центральной нервной системой и принятие решений, что в свою очередь вносит некоторую величину запаздывания.

Наглядный пример взаимодействия человека и конструкции известен из повседневной жизни, когда при движении по довольно легкому длинному подвесному мосту на двухколесном транспортном средстве (велосипеде) мост начинает ощутимо раскачиваться. При этом чем активнее пытается балансировать человек, тем сильнее раскачивается мост. Во всех случаях смягчить колебания помогает осознанное снижение усилий человека по сохранению равновесия, или снижение пропорционального коэффициента усиления «в голове».

Кибернетическая модель человека в частотной области имеет вид структуры, каждый блок которой описывает процесс восприятия, выработку стратегии и отработку управляющих действий [25, 26]. Выделяют три основных стимула восприятия информации: зрительный, вестибулярный и проприоцептивный. В рамках структурного подхода считается, что процессы переработки информации и выработки стратегии действий, происходящие в центральной нервной системе, для каждого стимула восприятия схожи. Каждый выполняемый процесс требует определенного времени, что достаточно хорошо описывается звеном запаздывания, величина которого возрастает по мере усложнения процесса управления. Упомянутое выше свойство адаптации человека отражается с помощью блоков коррекции для каждого воспринимаемого стимула, суммарная реакция которых затем поступает в моторную систему. Эта структура определяет передаточную функцию управляющих действий человека [25, 27–29].

Наиболее изученной является модель коррекции, вырабатываемой человеком на основе визуального восприятия командного стимула. Многие исследования показали, что человек способен производить усиление, дифференцирование и сглаживание воспринимаемого сигнала [27–29]. Модель пешехода, использующего для хождения визуальный и вестибулярный каналы восприятия информации, показана на рис. 2. Согласно этой модели пешеход пытается компенсировать рассогласование по углу и угловой скорости крена для удержания равновесия при ходьбе. Таким образом, пешеход находится в замкнутом контуре, и его поведение зависит от динамики моста.

Передаточную функцию модели пешехода от ошибки отклонения угла к углу крена можно записать в виде [24, 30, 31]

$$(6) \quad W_p(s) = NK_x s K_{\dot{x}} G(s),$$

$$(7) \quad G(s) = \frac{T^2 e^{-\tau s}}{s^2 + 2\xi T s + T^2},$$

где  $N$  – количество пешеходов,  $K_x$  и  $K_{\dot{x}}$  – коэффициенты усиления,  $G(s)$  – передаточная функция нервно-мышечной динамики пешехода,  $\xi$  и  $T$  – коэффициент демпфирования и частота,  $\tau$  – время нервно-мышечного запаздывания. Заметим, как показано в [31],  $K_{\dot{x}}$  имеет отрицательное значение.

Таким образом, с учетом модели моста (1) и (6) передаточная функция разомкнутой системы «мост–пешеходы» от смещения в поперечном направлении моста  $x$  к ошибке отклонения  $e_x$  имеет вид

$$(8) \quad W(s) = W_p(s)W_b(s) = \frac{NK_p T^2 s e^{-\tau s}}{(s^2 + 2\xi T s + T^2)(Ms^2 + Cs + K)},$$

где  $K_p = K_x K_{\dot{x}}$ .

#### 4. Анализ устойчивости системы «мост–пешеходы»

Переменными параметрами системы (8) являются количество пешеходов  $N$  и величина нервно-мышечного запаздывания  $\tau$ . Поперечная составляющая силы реакции опоры, выражаемая через коэффициент  $K_p$ , также может меняться в зависимости от частоты шагов в большую или меньшую сторону, но в данной работе рассматривается только случай средней частоты, равной 5,4 рад/с. Экспериментально было получено, что при средней частоте шагов пешеход действует на поверхность в поперечном направлении с силой около 38 Н [32]. Чтобы получить такую силу, согласно структуре на рис. 2 произведение коэффициентов  $K_x K_{\dot{x}}$  должно быть равно 48.

Остальные параметры системы принимаются постоянными. Известны следующие параметры лондонского моста Миллениум: масса  $M = 81\,000$  кг, жесткость  $K = 3\,390\,733$  кг/с<sup>2</sup>,  $C = 7681$  кг/с, собственная частота  $\Omega = \sqrt{K/M} = 6,5$  рад/с [8, 33]. Параметры нервно-мышечной динамики пешехода  $T = 30$ ,  $\xi = 0,7$  [31].

Комфортное время, необходимое на переработку информации в центральной нервной системе и передачу сигнала по нервно-мышечному волокну для летчиков в режиме ручного управления составляет около 0,2 с [25, 27]. Из-за движения поверхности моста изменяется угол ориентации пешехода, что является для него нестандартной ситуацией и запускает процесс адаптации к новым условиям, который отражается в настройке параметров (6), в том числе времени запаздывания. В зависимости от внешних обстоятельств человек может как уменьшать, так и увеличивать время нейро-мышечного запаздывания. Так, падение запаздывания до 0,08 с «... связано с возрастающим нейромускульным напряжением» [22].

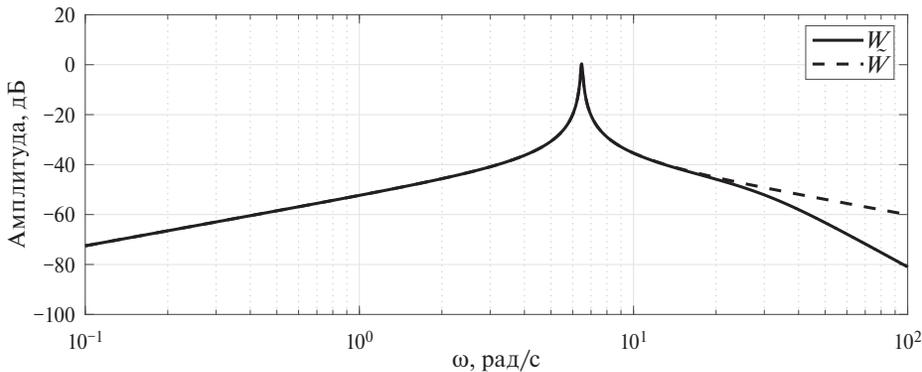


Рис. 3. Амплитудная частотная характеристика системы «мост–пешеходы» с учетом звена нервно-мышечной динамики и без него.

Для оценки величины времени запаздывания и соответствующей ему частоты, влияющих на устойчивость системы, удобно использовать частотный критерий Я.З. Цыпкина [34, 35]. Критическая частота  $\omega_{0i}$  определяется из уравнения

$$(9) \quad |W(\omega_{0i}, N)| - 1 = 0,$$

где  $|W|$  – амплитудная характеристика разомкнутой системы без запаздывания (8), после чего полученное  $\omega_{0i}$  подставляется в выражение для соотношения фаз, которое в общем случае имеет вид

$$(10) \quad \tau_{0i}(n) = \frac{\theta(\omega_{0i})}{\omega_{0i}} + \frac{2\pi n}{\omega_{0i}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $\theta(\omega_{0i}) = \arctg(W(\omega_{0i}))$ . Это критическое время запаздывания  $\tau_{0i}$  определяет переход корней через мнимую ось и, следовательно, границу устойчивости системы. Исследуемая система будет устойчива, когда (9) не имеет решения относительно  $\omega_{0i}$ , т.е., когда годограф системы лежит внутри единичной окружности.

Применим критерий (9), (10) к (8). Заметим, что амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) (8) совпадает с АЧХ без учета звена нервно-мышечной динамики в широком диапазоне частот 1–10 рад/с (рис. 3). Это позволяет сделать предположение, что для оценки устойчивости системы можно пренебречь звеном нервно-мышечной динамики в данном диапазоне частот, и тогда (8) можно записать как

$$(11) \quad \tilde{W}(s) = \frac{NK_p s e^{-\tau s}}{(Ms^2 + Cs + K)}.$$

Перейдем в (8) от  $s$  к  $j\omega$  и выделим вещественную и мнимую части без учета звена запаздывания:

$$(12) \quad \tilde{W}(j\omega) = K_p N \left[ \frac{j\omega(K - M\omega^2)}{(K - M\omega^2)^2 + C^2\omega^2} + \frac{C\omega^2}{(K - M\omega^2)^2 + C^2\omega^2} \right].$$

Затем (9) можно записать как

$$(13) \quad \frac{K_p^2 N^2 \left[ (C\omega^2)^2 - \omega^2 (K - M\omega^2)^2 \right]}{\left[ (K - M\omega^2)^2 + C^2 \omega^2 \right]^2} - 1 = 0,$$

раскрыв скобки, получим уравнение восьмого порядка:

$$(14) \quad A_8 \omega^8 + A_6 \omega^6 + A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_8 &= -M^4, & A_6 &= 4KM^3 - K_p^2 M^2 N^2 - 2C^2 M^2, \\ A_4 &= 2KK_p^2 MN^2 - 6K^2 M^2 + C^2 K_p^2 N^2 + 4C^2 KM, \\ A_2 &= 4K^3 M - K^2 K_p^2 N^2 - 2C^2 K^2, & A_0 &= -K^4. \end{aligned}$$

Выполним замену переменной в (14)  $\omega^2 = t$ . Как будет показано ниже, это необходимо для анализа полученного решения. Решение (14) относительно  $\omega$ , полученное в символьном виде с помощью MATLAB, представляет собой следующее выражение:

$$(15) \quad t^2 = \left[ \frac{2}{4M^2} \sqrt{C^4 + \frac{\sigma_7}{2} + 4KM^3\sigma_3 + 3C^2 K_p^2 N^2 - 2C^2 M^2 \sigma_3 - \sigma_2 - K_p^2 M^2 N^2 \sigma_3 - \sigma_1 - 2C^2 +} \right. \\ \left. + 2M^2 \sqrt{\frac{\sigma_4^2}{4M^8} + \frac{\sigma_6 - 8MK^3 + \sigma_5}{\sigma_4} + \frac{-C^4 + \sigma_2 + C^2 K_p^2 N^2 - 6K^2 M^2 + \sigma_1}{M^4} -} \right. \\ \left. - K_p^2 N^2 + 4KM \right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2KK_p^2 MN^2, & \sigma_2 &= 4C^2 KM, \\ \sigma_3 &= \sqrt{\frac{\sigma_7}{4M^4} - \frac{2K^2}{M^2} - \frac{8K^3 M}{\sigma_4} + \frac{\sigma_6}{\sigma_4} + \frac{2C^2 K_p^2 N^2}{M^4} + \frac{\sigma_5}{\sigma_4}}, \\ \sigma_4 &= 2C^2 M^2 + K_p^2 M^2 N^2 - 4KM^3, & \sigma_5 &= 2K^2 K_p^2 N^2, \\ \sigma_6 &= 4C^2 K^2, & \sigma_7 &= K_p^4 N^4. \end{aligned}$$

Выражение (15) стоит под знаком квадратного корня и зависит от переменного параметра количества пешеходов  $N$ . Это означает, что численно (15) может принимать любые значения, в том числе комплексные. Физический смысл решаемой задачи подразумевает только действительные величины, поэтому необходимо ввести условие существования действительного неотрицательного решения. Одним из условий является неотрицательность подкоренного выражения (15), исходя из чего в символьном виде с помощью MATLAB

получены все условия действительного решения:

$$(16) \quad N \in \mathbb{R} \wedge 2M^2 \sqrt{\frac{\sigma_5^2}{4M^8} + \frac{\sigma_7 - 8MK^3 + \sigma_6}{\sigma_5} + \frac{-C^4 + \sigma_3 + C^2Kp^2N^2 - 6K^2M^2 + \sigma_1}{M^4}} + \\ + 2\sqrt{C^4 + \frac{\sigma_8}{2} + 4KM^3\sigma_4 - 2C^2M^2\sigma_4 + 3C^2Kp^2N^2 - \sigma_3 - Kp^2M^2N^2\sigma_4 - \sigma_1 - \sigma_2} = \\ = 2C^2 - 4KM \wedge 2C^2 + \sigma_2 \neq 4KM \wedge 0 < N,$$

где

$$\sigma_1 = 2KKp^2MN^2, \quad \sigma_2 = Kp^2N^2, \quad \sigma_3 = 4C^2KM, \\ \sigma_4 = \sqrt{\frac{\sigma_8}{4M^4} - \frac{2K^2}{M^2} - \frac{8K^3M}{\sigma_5} + \frac{\sigma_7}{\sigma_5} + \frac{2C^2Kp^2N^2}{M^4} + \frac{\sigma_6}{\sigma_5}}, \\ \sigma_5 = 2C^2M^2 + Kp^2M^2N^2 - 4KM^3, \quad \sigma_6 = 2K^2Kp^2N^2, \\ \sigma_7 = 4C^2K^2, \quad \sigma_8 = Kp^4N^4.$$

Проанализировав все вышеописанные ограничения численно и аналитически в MATLAB, получим, что наименьшее  $N$ , при котором существует действительное решение, вытекает из следующего условия:

$$(17) \quad K_p^4N^4 + (4MKK_p^2 - 2C^2K_p^2)N^2 + C^4 - 4MKC^2 \geq 0.$$

Приравняв левую часть (17) к нулю и сделав замену  $N^2 = t_2$ , получим выражение для дискриминанта:

$$(18) \quad D_2 = (4MKK_p^2 - 2C^2K_p^2)^2 - 4K_p^4(C^4 - 4MKC^2) = 16K_p^4M^2K^2,$$

$$(19) \quad \sqrt{D_2} = \pm 4K_p^2MK,$$

тогда корни (17) можно найти из выражения

$$(20) \quad t_2^1 = \frac{-4MKK_p^2 + 2C^2K_p^2 + 4K_p^2MK}{2K_p^4},$$

$$(21) \quad t_2^2 = \frac{-4MKK_p^2 + 2C^2K_p^2 - 4K_p^2MK}{2K_p^4}.$$

Подставив численные параметры в (20) и (17), получим, что  $t_2^1 > 0$  и  $t_2^2 < 0$ . Далее потребуется выполнить обратную замену  $t_2$  на  $N^2$  и извлечь корень из  $t_2$ , поэтому сразу отбросим  $t_2^2 < 0$ , тогда

$$(22) \quad N^2 = \frac{-4MKK_p^2 + 2C^2K_p^2 + 4K_p^2MK}{2K_p^4},$$

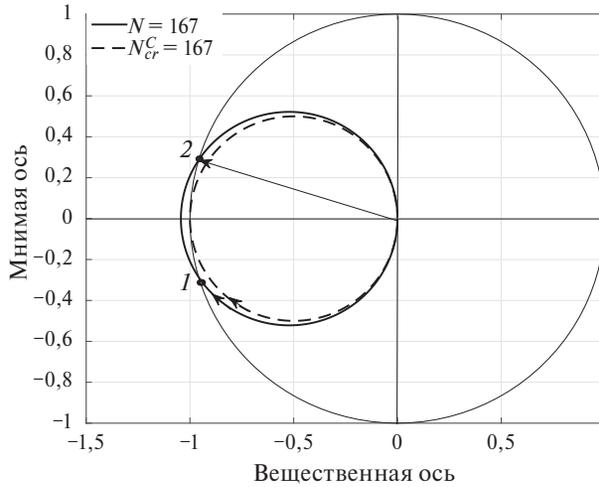


Рис. 4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы при различном количестве пешеходов.

откуда, оставив только положительный корень, получим:

$$(23) \quad N = \frac{C}{K_p}.$$

Подставив в (23) параметры системы, получим  $N = 160,0208$ , т.е. критическое количество пешеходов, полученное на основе критерия Я.З. Цыпкина  $N_{cr}^C = 160$ . Таким образом, это – максимально возможное значение, не зависящее от запаздывания, при котором сохраняется устойчивость системы. Графическое решение (9) показано на рис. 4, численный результат которого совпадает с (23). Дальнейшее увеличение  $N$  приводит к пересечению годографа с единичной окружностью в двух точках. Так, например, при  $N = 167$  получаем два решения  $\omega_{01} = 6,45$  рад/с и  $\omega_{02} = 6,48$  рад/с, соответствующие точки которых обозначены на рис. 4. Поскольку  $\omega_{02} > \omega_{01}$ , то  $\tau_{02} < \tau_{01}$  и  $\tau_{02}$  является критическим временем запаздывания, которое для данного годографа можно найти из выражения

$$(24) \quad \tau_{02} = \frac{\pi - \theta(\omega_{02})}{\omega_{02}}.$$

Подставив численные значения в (24), получим  $\tau_{02} = 0,086$  с. Таким образом, для  $N = 167$  критическим для устойчивости запаздыванием является  $\tau_{02} = 0,086$  с, что соответствует избыточному нервно-мышечному напряжению человека [22].

Дальнейшее увеличение количества пешеходов приводит к росту критического запаздывания. Иллюстрация зависимости количества пешеходов от нервно-мышечного запаздывания  $N(\tau_0)$ , полученная из решения (9) и (24), показана на рис. 5. Из рисунка видно, что область устойчивости ограничена

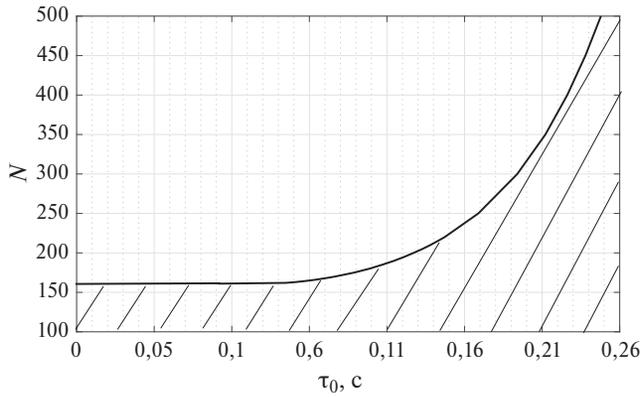


Рис. 5. Зависимость количества пешеходов от критического нервно-мышечного запаздывания. Штриховкой обозначена область устойчивости.

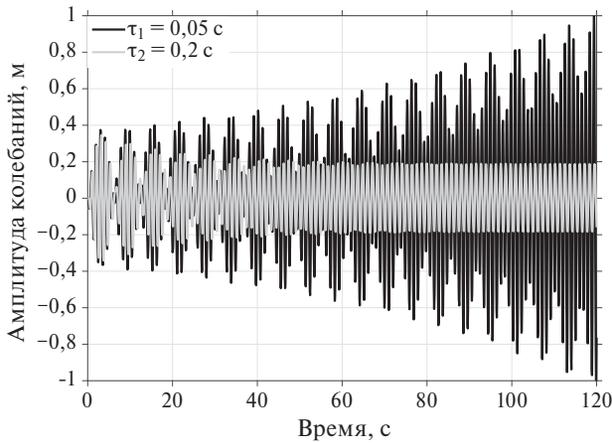


Рис. 6. Зависимость амплитуды колебаний моста от времени для 250 пешеходов, шагающих с частотой 5,4 рад/с.

количеством пешеходов при малых запаздываниях и резко увеличивается в области нормальных для человека значений запаздывания.

Зависимость амплитуды колебаний моста от времени при воздействии 250 пешеходов, идущих со средней частотой 5,4 рад/с и имеющих различное запаздывание, изображена на рис. 6. При нормальном  $\tau_2 = 0,2$  с мост демонстрирует устойчивые колебания с амплитудой около 20 см, тогда как нервно-мышечное напряжение, характерное для меньшего  $\tau_1 = 0,05$  с, приводит к постепенному нарастанию амплитуды колебаний.

На рис. 7 показана амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) системы «мост–пешеходы» при различной величине нервно-мышечного запаздывания (0,02 и 0,2 с), которое вносит соответствующий фазовый сдвиг между входом и выходом системы.

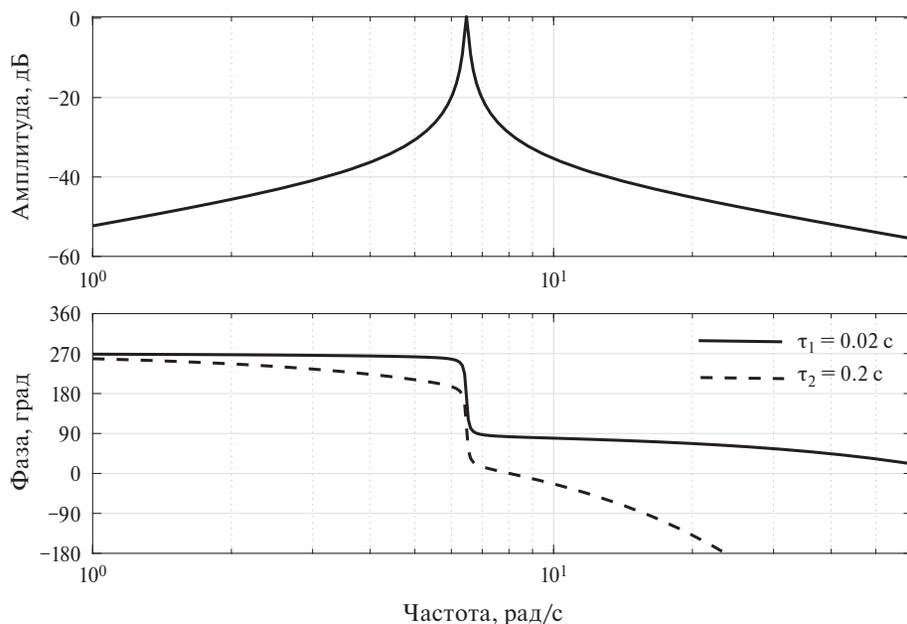


Рис. 7. АФЧХ системы «мост–пешеходы» при различной величине нервно-мышечного запаздывания.

Таким образом, на устойчивость системы влияет не только количество пешеходов, но и величина запаздывания, которую они могут вносить в силу особенности работы нервно-мышечной системы, что ранее не принималось во внимание при анализе системы «мост–пешеходы».

## 5. Заключение

В работе предложен новый подход к исследованию устойчивости человеко-машинных систем с колебательной динамикой, таких как система «мост–пешеходы». Рассмотрена линейная модель замкнутой системы «мост–пешеходы», в которой учтена не только динамика мышц пешеходов, но и процессы, протекающие в центральной нервной системе. Такой подход позволяет описать замкнутую систему в виде передаточной функции, включающей звено запаздывания, и оценить устойчивость системы методами теории автоматического управления.

Применение предложенного подхода продемонстрировано на примере раскачки лондонского моста Миллениум при движении по нему пешеходов в день его открытия. При помощи частотного критерия Я.З. Цыпкина для различных величин запаздывания получены условия на число пешеходов, при которых не нарушается устойчивость замкнутой системы. Численные результаты показывают, что значительное раскачивание моста можно объяснить уменьшением нервно-мышечного запаздывания пешеходов. Другими словами, из-за высокой чувствительности пешеходов к незначительным колебаниям поверх-

ности им требуется некоторое время для адаптации к новым условиям, что проявляется как излишнее нервно-мышечное напряжение. Быстрая реакция пешехода вносит небольшой фазовый сдвиг между входом и выходом системы «мост–пешеходы», приводящий к раскачиванию моста и потере устойчивости, тогда как замедленная реакция вносит фазовый сдвиг около 90 град, способствующий стабилизации.

Предложенный подход позволяет более детально подойти к анализу и проектированию конструкций, используемых людьми и обладающих колебательной динамикой. Дальнейшие исследования могут быть направлены на уточнение параметров модели нервно-мышечной динамики, учет нелинейностей модели моста и влияния внешних возмущений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dallard P., Fitzpatrick A., Flint A., Le Bourva S., Low A., Ridsdill Smith R.M., Willford M.* The London Millennium footbridge // *Structural Engineers*. 2001. V. 79. No. 22. P. 17–33.
2. *Strogatz S., Abrams D., McRobie F., Eckhardt B., Ott E.* Crowd synchrony on the Millennium Bridge // *Nature*. 2005. V. 438. P. 43–44. <https://doi.org/10.1038/43843a>
3. *Eckhardt B., Ott E., Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A.* Modeling walker synchronization on the Millennium Bridge // *Phys. Rev. E*. 2007. V. 75. P. 021110. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.021110>
4. *Josephson B.* Out of step on the bridge // *Letter to the Editor*. *The Guardian*. UK. 2000.
5. *Barker C.* Some observations on the nature of the mechanism that drives the self-excited lateral response of footbridges // *International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges*. Paris, 2002.
6. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics* / Ed. by H. Araki. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1975. P. 420–422.
7. *Macdonald J.* Pedestrian-induced vibrations of the Clifton Suspension Bridge, UK // *Proceedings of The Ice-Bridge Engineering*. 2008. V. 161. No. 2. P. 69–77. <https://doi.org/10.1680/bren.2008.161.2.69>
8. *Belykh I., Bocian M., Champneys A., Daley K., Jeter R., Macdonald J.H.G., McRobie A.* Emergence of the London Millenium Bridge instability without synchronization // *Nature Communications*. 2021. V. 12. No. 1. P. 7223. <https://doi.org/10.1038/s41467-021-27568-y>
9. *Belykh I., Jeter R., Belykh V.* Foot force models of crowd dynamics on a wobbly bridge // *Science Advances*. 2017. V. 3. No. 11. P. e1701512. <https://doi.org/10.1126/sciadv.1701512>
10. *Belykh I.V., Daley K.M., Belykh V.N.* Pedestrian-induced bridge instability: the role of frequency ratios // *Radiophys. Quant. Electron*. 2022. V. 64. No. 10. P. 700–708. <https://doi.org/10.1007/s11141-022-10172-5>
11. *Živanović S., Pavic A., Reynolds P.* Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review // *J. Sound Vibrat*. 2005. V. 279. No. 1–2. P. 1–74. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.01.019>

12. *Chopra A.* Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering / Ed. by A. K. Chopra. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1995. 763 p.
13. *Clough R., Penzien J.* Dynamics of Structures. N.Y.: McGraw-Hill, 1993.
14. *Bachmann H., Pretlove A., Rainer H.* Dynamic forces from rhythmical human body motions, in: Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines. Birkhauser, Basel, 1995. Appendix G.
15. *Shahabpoor E., Pavic A., Racic V., Zivanovic S.* Effect of group walking traffic on dynamic properties of pedestrian structures // J. Sound Vibrat. 2017. V. 387. P. 207–225. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.10.017>
16. *Van Nimmen K., Pavic A., Van den Broeck P.* A simplified method to account for vertical human-structure interaction // Structures. 2021. V. 32. P. 2004–2019. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.03.090>
17. *Macdonald J.* Lateral excitation of bridges by balancing pedestrians // Proc. R. Soc. Lond. 2009. V. 465. P. 1055–1073. <https://doi.org/10.1098/rspa.2008.0367>
18. *Czaplewski B., Bocian M., Macdonald J.H.G.* Calibration of inverted pendulum pedestrian model for laterally oscillating bridges based on stepping behaviour // J. Sound Vibrat. 2024. V. 572. No. 22. P. 118141. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2023.118141>
19. *Буков В.Н.* Оптимизация человеко-машинных систем на основе прогнозирования функционального состояния оператора // АиТ. 1995. Т. 12. С. 124–137.
20. *Racic V., Morin J. B.* Data-driven modelling of vertical dynamic excitation of bridges induced by people running // Mechanical Systems and Signal Processing. 2014. V. 43. No. 1. P. 153–170. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.10.006>
21. *Yao S., Wright J., Pavic A., Reynolds P.* Forces generated when bouncing or jumping on a flexible Structure // International Conference on Noise and Vibration. Leuven, Belgium, 2002. P. 563–572.
22. *Бюшгенс Г.С., Студнев П.В.* Аэродинамика самолета. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979. 352 с.
23. *McRuer D.* Pilot-Induced Oscillations and Human Dynamic Behavior: Tech. Rep. 4683: NASA, 1995.
24. *Курочкин И.В., Мальцев А.А.* О статической оптимизации взаимодействия компонент человеко-машинных систем // АиТ. 1981. Т. 8. С 35–45.
25. *Ефремов А.В., Оглоблин А.В., Предтеченский А.Н., Родченко В.В.* Легчик как динамическая система. М.: Машиностроение, 1992. 336 с.
26. *Hess R.* A Model for the Human Use of Motion Cues in Vehicular Control // Guidance, Control, Dynam. 1990. V. 13. No. 3. P. 476–482.
27. *McRuer D., Graham D., Krendel E., Reisener W.* Human Pilot Dynamics in Compensatory Systems: Theory, Models and Experiments with Controlled-Element and Forcing Function Variations. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Ltd., 1965. AFFDL-TR-65-15.
28. *Hess R.A.* A Model-Based Theory for Analyzing Human Control Behavior // Advances in Man-Machine Systems Research. 1985. V. 2. P. 129–175.
29. *Liang H., Xie W., Wei P., Dehao A., Zhiqiang Z.* Identification of Dynamic Parameters of Pedestrian Walking Model Based on a Coupled Pedestrian-Structure System // Appl. Sci. 2021. V. 11. No. 14. P. 1–23. <https://doi.org/10.3390/app11146407>

30. *Magdaleno R., McRuer D.* Experimental Validation and Analytical Elaboration for Models of the Pilot's Neuromuscular Subsystem in Tracking Tasks: Tech. Rep. CR-1757: NASA, 1971.
31. *Hess R., Moore J.K., Hubbard M.* Modeling the Manually Controlled Bicycle // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans. 2012. V. 42. No. 3. P. 545–557. <https://doi.org/10.1109/TSMCA.2011.2164244>
32. *Andriacchi T., Ogle J., Galante J.* Walking speed as a basis for normal and abnormal gait measurements // J. Biomech. 1977. V. 10. No. 4. P. 261–268.
33. *Han H., Zhou D., Ji T., Zhang J.* Modelling of lateral forces generated by pedestrians walking across footbridges // Appl. Math. Modell. 2021. Vol. 89. P. 1775–1791. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.081>
34. *Цыпкин Я.З.* Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // АиТ. 1946. Т. 7. № 2–3. С. 107–129.
35. *Никольский А.А.* Обобщенные критерии устойчивости особых линейных систем автоматического управления с запаздыванием // Электричество. 2020. Т. 1. С. 38–46. <https://doi.org/10.24160/0013-5380-2020-11-38-46>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 27.06.2024

После доработки 20.11.2024

Принята к публикации 28.11.2024